

А. Г. Мерзляк  
Д. А. Номіровський  
В. Б. Полонський  
М. С. Якір

# АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

**Підручник для 10 класу**  
з поглибленим вивченням математики

*Рекомендовано*  
*Міністерством освіти і науки України*

Харків  
«Гімназія»  
2010

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]  
ББК 22.141я721.6  
М52

*Рекомендовано*  
*Міністерством освіти і науки України*  
(лист від 09.08.2010 № 1/11-7525)

**Мерзляк А. Г.**

**М52** Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 кл. з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2010. — 415 с.: іл.

ISBN 978-966-474-103-0.

УДК [373.5 : 372.851]:[512.1 + 517.1]  
ББК 22.141я721.6

© А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський,  
В. Б. Полонський, М. С. Якір, 2010  
© С. Е. Кулинич, художнє оформлення, 2010  
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, 2010

ISBN 978-966-474-103-0

### ЛЮБИ ДЕСЯТИКЛАСНИКИ!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — алгебру і початки аналізу.

Цей предмет надзвичайно важливий. Мабуть, немає сьогодні такої галузі науки, де б не застосовувалися досягнення цього розділу математики. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують «математичний інструмент».

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий предмет, який розвиває аналітичне і логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість.

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях навчатися в математичному класі. У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за поглибленою програмою. Це не просто. Потрібно бути наполегливим і завзятим, уважним і акуратним, при цьому найголовніше — не бути байдужим до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник розділено на шість параграфів, кожен з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним шрифтом**. Також не залишайте поза увагою слова, надруковані *курсивом*.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один з можливих зразків оформлення розв'язання. До кожного пункту підібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено зірочкою (\*)).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете знати більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Держайте! Бажаємо успіху!

## ШАНОВНІ КОЛЕГИ!




Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано обширний і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

**Червоним** кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу на розсуд учителя можна розв'язувати усно.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

## Умовні позначення

- $n^{\circ}$  завдання, що відповідають початковому і середньому рівням навчальних досягнень;
- $n^{\cdot}$  завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
- $n^{\bullet}$  завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
- $n^*$  задачі для математичних гуртків і факультативів;
-  задачі, у яких отримано результат, що може бути використаний при розв'язуванні інших задач;
-  закінчення доведення теореми;
-  закінчення розв'язування прикладу;



рубрика «Коли зроблено уроки».

# § 1.

## ПОВТОРЕННЯ Й СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ АЛГЕБРИ 8–9 КЛАСІВ

### 1. Задачі на повторення курсу алгебри 8–9 класів

#### Вправи

##### Перетворення раціональних виразів

- 1.1. Спростіть вираз  $\left(\frac{ab}{a-b} + a\right)\left(\frac{ab}{a+b} - a\right) : \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2}$ .
- 1.2. Спростіть вираз  $\left(\frac{a+5}{(a-9)(a+9)} + \frac{a+7}{(a-9)^2}\right)\left(\frac{a-9}{a+3}\right)^2 + \frac{7+a}{9+a}$ .
- 1.3. Спростіть вираз  $x^2y^2\left(\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) + \frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right)$ .
- 1.4. Спростіть вираз  $\frac{a^2-1}{b^2+b}\left(1 - \frac{1}{1-\frac{1}{b}}\right)\frac{1+b-b^3-b^4}{1-a^2}$ .
- 1.5. Доведіть тотожність
- $$\frac{(x-y)^2 + xy}{(x+y)^2 - xy} \left(\frac{x^5 + y^5 + x^3y^2 + x^2y^3}{(x^3 - y^3)(x^3 + y^3 + x^2y + xy^2)}\right)^{-1} = x - y.$$
- 1.6. Доведіть тотожність
- $$\left(a^2 - b^2 - \frac{4a^2b - 4ab^2}{a+b}\right)\left(\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} - \frac{2ab}{a^2 - b^2}\right)^{-1} = (a-b)^2.$$

**1.7.** Доведіть тотожність  $\frac{3xyz}{xy+yz+zx} + \frac{\frac{1-x}{x} + \frac{1-y}{y} + \frac{1-z}{z}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 1$ .

**1.8.** Спростіть вираз  $\frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2}$ .

**1.9.** Спростіть вираз  $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2x(x-1)^2}{x^4 + x^2 + 1} + \frac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8 + x^4 + 1}$ .

**1.10.** Спростіть вираз

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} + \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

**1.11.** Доведіть тотожність

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

**1.12.** Спростіть вираз  $\frac{1}{1-b} + \frac{1}{1+b} + \frac{2}{1+b^2} + \frac{4}{1+b^4} + \dots + \frac{2^n}{1+b^{2^n}}$ .

**1.13.** Відомо, що  $a^2 - a - 1 = 0$ . Доведіть, що

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) \left(a^4 + \frac{1}{a^4}\right) \dots \left(a^{2^{n-1}} + \frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right) = a^{2^n} - \frac{1}{a^{2^n}}$$

**1.14.** Доведіть, що коли  $a + b + c = 1$ ,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ , то  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ .

**1.15.** Доведіть, що коли  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  і  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ , то

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

**1.16.** Розкладіть на множники вираз

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$$

**1.17.** Розкладіть на множники вираз

$$x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$$

**1.18.** Попарно різні числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  такі, що  $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$ .  
Доведіть, що  $|abc| = 1$ .

**Перетворення виразів, які містять квадратні корені**

**1.19.** Знайдіть значення виразу  $(\sqrt{28} - \sqrt{12}) \cdot \sqrt{10 + \sqrt{84}}$ .

**1.20.** Знайдіть значення виразу  $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}}\right) \cdot (\sqrt{6}+11)$ .

- 1.21.** Знайдіть значення виразу  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}} - \frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$ .
- 1.22.** Знайдіть значення виразу  $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$ .
- 1.23.** Знайдіть значення виразу  $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$ .
- 1.24.** Знайдіть значення виразу  $\sqrt{17+6\sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$ .
- 1.25.** Знайдіть значення виразу  $2\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{13-4\sqrt{3}}$ .
- 1.26.** Знайдіть значення виразу  $(2-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}$ .
- 1.27.** Доведіть, що  $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$ .
- 1.28.** Доведіть, що  $\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8$ .
- 1.29.** Доведіть, що  $\frac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$ .
- 1.30.** Доведіть, що  $\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}(5+2\sqrt{6})(49-20\sqrt{6})}{\sqrt{27-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}}=1$ .
- 1.31.** Знайдіть значення виразу  $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ .
- 1.32.** Знайдіть значення виразу  $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}$ .
- 1.33.** Знайдіть значення виразу  $\left(\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right):\left(3a^2+3b\sqrt{ab}\right)+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}$ .
- 1.34.** Спростіть вираз  $\left(\sqrt{a^3-2a^2+a}+\frac{4a\sqrt{a}}{\sqrt{(1-a)^2}}\right):\left(\frac{\sqrt{a^3}}{a-1}-\left(\frac{1-a}{\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)$ .
- 1.35.** Спростіть вираз  $\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\frac{x^2-1}{2}+1$ .
- 1.36.** Знайдіть значення виразу  $\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^{-2}-1}-\frac{1}{x}\right)$ , якщо  $0 < x < 1$ .
- 1.37.** Спростіть вираз  $\left(\frac{(\sqrt{a^3}-\sqrt{8})(\sqrt{a}+\sqrt{2})^2}{a+\sqrt{2a}+2}\right)+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}$ .

**1.38.** Знайдіть значення виразу  $\frac{\sqrt{b^2-2b+1}}{b} + b\sqrt{b^2-2b+1} + 2 - \frac{2}{b}$ ,  
якщо  $0 < b < 1$ .

**1.39.** Спростіть вираз

$$\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \left( \frac{a+b}{a-b} - \frac{b}{b-\sqrt{ab}} + \frac{a}{\sqrt{ab}+a} \right) - \frac{\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}}{2}.$$

**1.40.** Спростіть вираз  $\frac{1+(a+\sqrt{a^2-1})^2(b+\sqrt{b^2-1})^2}{(a+\sqrt{a^2-1})(b+\sqrt{b^2-1})}$ .

**1.41.** Спростіть вираз  $\frac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2\sqrt{b+2}}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2\sqrt{b-2}}$  при  $b > 2$ .

**1.42.** Знайдіть значення виразу

$$\sqrt{\frac{a-2\sqrt{a-1}}{a+2\sqrt{a-1}}} + \sqrt{\frac{a+2\sqrt{a-1}}{a-2\sqrt{a-1}}} - \frac{4}{\sqrt{a^2-4a+4}}.$$

**1.43.** Спростіть вираз  $\frac{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}\sqrt{x-4}}{\sqrt{1-\frac{8}{x} + \frac{16}{x^2}}}$ .

### Раціональні рівняння і нерівності

**1.44.** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $\frac{5}{x^2-4x+4} - \frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} = 0$ ;
- 2)  $1 + \frac{2x}{x+4} + \frac{27}{2x^2+7x-4} = \frac{6}{2x-1}$ ;
- 3)  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-3}{x+3} + \frac{x+4}{x-4} = 4$ ;
- 4)  $\frac{x^2+4x+4}{x+4} - \frac{2x+6}{x+2} = \frac{x^2+x+1}{x+1} - \frac{2x+9}{x+3}$ ;
- 5)  $|x+2| + |x-3| = 5$ ;
- 6)  $|2x+5| = |x| + 2$ ;
- 7)  $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$ .

**1.45.** Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $\frac{3x}{x^3-1} - \frac{5}{4x^2+4x+4} = \frac{1}{2(1-x)}$ ;
- 2)  $\frac{x}{2x^2+12x+10} + \frac{3x+1}{4x^2+16x-20} - \frac{x+34}{x^3+5x^2-x-5} = 0$ ;

$$3) \frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} = \frac{x-7}{x-1} + 4;$$

$$4) \frac{x^2+2x+2}{x+1} + \frac{x^2+8x+20}{x+4} = \frac{x^2+4x+6}{x+2} + \frac{x^2+6x+12}{x+3};$$

$$5) \frac{|x-3|}{|x-2|-1} = 1;$$

$$6) ||3-x|-x+1|+x=6.$$

1.46. Розв'яжіть рівняння:

$$1) \frac{4}{x-3} - \frac{a}{2} = 2;$$

$$2) \frac{2x}{2x+a} - \frac{a-2}{2x-a} - \frac{4a-2a^2}{4x^2-a^2} = 0.$$

1.47. Розв'яжіть рівняння  $\frac{6}{x^2-16} - \frac{1}{x-4} = \frac{3a}{4+x}$ .

1.48. Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x^2 - 6x + 5)(3x - 1)^2 > 0;$$

$$2) (x^2 - 6x + 5)(3x - 1)^2 \leq 0;$$

$$3) (x^2 - x - 2)(x^2 - 4x + 3) \geq 0;$$

$$4) \frac{(x+1)(x-2)^4(x+3)}{(x-7)(1-3x)} > 0;$$

$$5) \frac{x^3+x^2+3x+3}{x^2-6x+7} \leq 0;$$

$$6) \frac{|x|(x-2)^3}{|x+3|(x-4)} \geq 0;$$

$$7) (x+7)\sqrt{x+x^2-20} > 0;$$

$$8) \frac{x-1}{x+1} < x;$$

$$9) \frac{14x}{x+1} - \frac{9x-30}{x-4} < 0;$$

$$10) \frac{4}{x+1} + \frac{2}{1-x} < 1;$$

$$11) (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5;$$

$$12) (x^2 + 3x)(2x + 3) - 16 \cdot \frac{2x + 3}{x^2 + 3x} \geq 0;$$

$$13) \frac{3x + |x-1|}{x-2} > 1;$$

$$14) \frac{(1+x)(2+x)}{x^2 - |x| - 2} \geq -3x;$$

$$15) |x^2 - 3x| + x - 2 < 0;$$

$$16) |x^2 + 3x| \geq 2 - x^2.$$

**1.49.** Розв'яжіть нерівність:

1)  $(x^2 - 10x + 9)(4x + 1)^2 > 0$ ;

2)  $(x^2 - 10x + 9)(4x + 1)^2 \leq 0$ ;

3)  $(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 4) \geq 0$ ;

4)  $\frac{x^3 + 2x^2 + 5x + 10}{x^2 - x - 6} \leq 0$ ;

5)  $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x+2}$ ;

6)  $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) < -5$ ;

7)  $(x^2 - 2x)(2x - 9) - 9 \cdot \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} \leq 0$ ;

8)  $\frac{2x + |x + 1|}{x - 2} > 1$ ;

9)  $\frac{4}{|x + 3| - 1} \geq |x + 2|$ ;

10)  $\frac{(1-x)(2-x)}{x^2 + |x| - 2} \geq -2x$ ;

11)  $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$ ;

12)  $|x^2 + 4x + 3| > x + 3$ .

**1.50.** При яких значеннях параметра  $a$  рівняння

$$(a + 4)x^2 + (a + 4)x + 3 = 0$$

має корені?

**1.51.** При яких значеннях параметра  $a$  рівняння

$$(a + 3)x^2 + (a^2 + 3a)x + 1 = 0$$

має один корінь?

**1.52.** Знайдіть значення параметра  $a$ , при яких сума коренів рівняння  $x^2 - (a^2 - 4a + 3)x + a - 2 = 0$  дорівнює нулю.

**1.53.** При яких значеннях параметра  $a$  різниця коренів рівняння  $(a - 2)x^2 - (a - 4)x - 2 = 0$  дорівнює 3?

**1.54.** При яких значеннях параметра  $a$  різниця коренів рівняння  $2x^2 - (a + 1)x + a - 1 = 0$  дорівнює їх добутку?

**1.55.** При яких значеннях параметра  $a$  нерівність  $(a + 4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$  виконується при всіх значеннях  $x$ ?

**1.56.** При яких значеннях параметра  $a$  нерівність  $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$  виконується для будь-якого значення  $x$ ?

**1.57.** При яких значеннях параметра  $a$  нерівність  $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$  виконується при всіх значеннях  $x$ ?

- 1.58.** При яких значеннях параметра  $a$  один з коренів рівняння  $3ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$  більший за 1, а другий менший від 1?
- 1.59.** При яких значеннях параметра  $a$  корені  $x_1$  і  $x_2$  рівняння  $2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a + 1) = 0$  задовольняють умову  $x_1 < a < x_2$ ?
- 1.60.** При яких значеннях параметра  $a$  корені рівняння  $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$  належать проміжку  $[-2; 6]$ ?
- 1.61.** При яких значеннях параметра  $a$  нерівність  $ax^2 - 4x + 4a > 0$  виконується для всіх додатних значень  $x$ ?
- 1.62.** При яких значеннях параметра  $a$  нерівність  $x^2 + ax - 7a < 0$  виконується для всіх  $x$  з проміжку  $(1; 2)$ ?
- 1.63.** При яких значеннях параметра  $a$  всі розв'язки нерівності  $ax^2 - 2x - a(a^2 + 2) < 0$  задовольняють нерівність  $x^2 \leq 9$ ?
- 1.64.** При яких значеннях параметра  $a$  нерівність  $\left| \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$  виконується для будь-якого значення  $x$ ?
- 1.65.** Знайдіть усі значення параметра  $q$  такі, що для будь-якого значення параметра  $p$  рівняння  $x^2 + px + q = 0$  має розв'язок.
- 1.66.** Розв'яжіть рівняння:
- 1)  $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$ ;
  - 2)  $(x^2 + x + 4)^2 + 8x(x^2 + x + 4) + 15x^2 = 0$ ;
  - 3)  $(x - 2)^4 + (x + 2)^4 = 82$ ;
  - 4)  $x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} - x = 4$ ;
  - 5)  $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \frac{x+1}{x-4} = 12 \cdot \left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2$ ;
  - 6)  $\frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2}$ ;
  - 7)  $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$ .
- 1.67.** Розв'яжіть рівняння:
- 1)  $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$ ;
  - 2)  $5(x^2 + 2x)^2 - 11(x^2 + 2x)(x^2 + x + 1) + 6(x^2 + x + 1)^2 = 0$ ;
  - 3)  $x(x + 3)(x + 5)(x + 8) + 36 = 0$ ;
  - 4)  $(x^2 + x + 1)^2 = x^2(3x^2 + x + 1)$ ;
  - 5)  $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 16$ .

### Властивості функцій

**1.68.** Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}};$$

$$2) y = \sqrt{12x^2 - 4x^3 - 9x} - \sqrt{2 - |x|}.$$

**1.69.** Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{\frac{7-x}{\sqrt{4x^2-19x+12}}};$$

$$2) y = \sqrt{|x-1|(3x-6)} + \frac{3}{x^2+4x-21}.$$

**1.70.** Знайдіть область значень функції:

$$1) y = \frac{2x-1}{x+2};$$

$$3) y = \sqrt{x^2+2x+2};$$

$$2) y = x + \frac{1}{x};$$

$$4) y = 5 - \sqrt{x^2-6x+10}.$$

**1.71.** Знайдіть область значень функції:

$$1) y = \frac{3x-1}{2x+4};$$

$$3) y = \sqrt{4x-x^2};$$

$$2) y = x + \frac{1}{4x};$$

$$4) y = 3 - \sqrt{x^2-2x+2}.$$

**1.72.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$y = \frac{1}{x^2-4x+10}.$$

**1.73.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$y = \frac{2}{x^2-6x+11}.$$

**1.74.** Знайдіть:

$$1) \max_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2+2};$$

$$2) \min_M \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}, \text{ де } M = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

**1.75.** Знайдіть:

$$1) \min_{\mathbb{R}} \frac{1}{-x^2+2x-3};$$

$$2) \max_M (\sqrt{2-x} + \sqrt{x+1}), \text{ де } M = [-1; 2].$$

**1.76.** Для кожного значення параметра  $a$  знайдіть найбільше і найменше значення функції  $f$  на множині  $M$ :

$$1) f(x) = x^2 + 4x + 5a, M = [-1; 1];$$

$$2) f(x) = x^2 - 4x, M = [-1; a], \text{ де } a > -1.$$

**1.77.** Для кожного значення параметра  $a$  знайдіть найбільше і найменше значення функції  $f$  на множині  $M$ :

1)  $f(x) = -x^2 + 6x - 2a$ ,  $M = [0; 4]$ ;

2)  $f(x) = 2x - x^2$ ,  $M = [a; 2]$ , де  $a < 2$ .

**1.78.** Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x} + 2\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 8$ .

**1.79.** Розв'яжіть рівняння  $3x^2 + \sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+2} = 17$ .

**1.80.** Розв'яжіть рівняння  $|x| + |x-2| + \sqrt{x-1} = 2$ .

**1.81.** Розв'яжіть рівняння  $2x\sqrt{4x-x^2} = x^2 + 4$ .

**1.82.** Дослідіть на парність функцію:

1)  $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x+3} - \frac{x^3 + 2x^2}{x-3}$ ;

3)  $y = \frac{x^3 - x}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}$ ;

2)  $y = \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x^2 - 4}$ ;

4)  $y = \frac{x^2 - 3|x| - 5}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}$ .

**1.83.** Дослідіть на парність функцію:

1)  $y = \frac{x^5}{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}$ ;

2)  $y = \frac{1}{(4x-2)^5} + \frac{1}{(4x+2)^5}$ ;

3)  $y = \frac{2x+1}{x^2-3x+1} - \frac{2x-1}{x^2+3x+1}$ .

**1.84.** Відомо, що  $D(f) = \mathbb{R}$ . Доведіть, що функції  $y = f(x) + f(-x)$  і  $y = f(x) \cdot f(-x)$  є парними, а функція  $y = f(x) - f(-x)$  — непарною.

**1.85.** Побудуйте графік функції:

1)  $y = (|x| - 1)^2$ ;

4)  $y = \sqrt{|x+2| - 1}$ ;

2)  $y = \sqrt{1 - |x|}$ ;

5)  $y = \left| \sqrt{|x| - 2} - 1 \right|$ ;

3)  $y = \sqrt{1-x}$ ;

6)  $y = \left| \sqrt{2x-1} - 2 \right|$ .

**1.86.** Побудуйте графік функції:

1)  $y = \frac{1}{|x| - 2}$ ;

4)  $y = (|x-2| + 1)^2$ ;

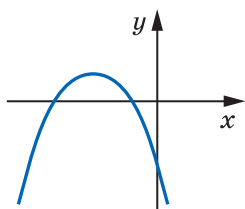
2)  $y = \left| \frac{1}{x-4} \right|$ ;

5)  $y = \left| \frac{1}{|x|-1} - 2 \right|$ ;

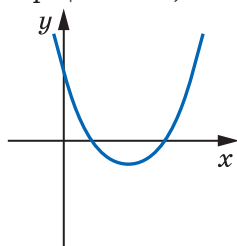
3)  $y = \frac{1}{|x+1| - 2}$ ;

6)  $y = \left| \sqrt{2x+1} - 2 \right|$ .

1.87. На рисунку 1.1 зображено графік квадратичної функції  $y = ax^2 + bx + c$ . Визначте знаки коефіцієнтів  $a$ ,  $b$  і  $c$ .



а)



б)

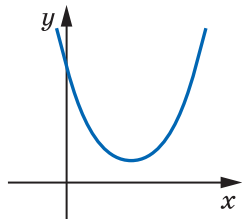
Рис 1.1

1.88. На рисунку 1.2 зображено графік квадратичної функції  $y = ax^2 + bx + c$ . Визначте знаки коефіцієнтів  $a$ ,  $b$  і  $c$ .

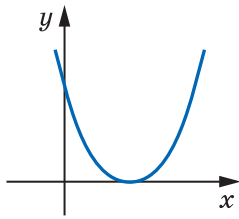
1.89. Установіть, скільки коренів залежно від значення параметра  $a$  має рівняння  $|x^2 - 6|x| + 8| = a$ .

1.90. Установіть, скільки коренів залежно від значення параметра  $a$  має рівняння  $|x^2 + 2|x - 2| - 4| = a$ .

1.91. Чи є правильним твердження, що на рисунку 1.3 зображено параболу  $y = ax^2 + bx + c$  і пряму  $y = bx + c$ ?



а)



б)

Рис 1.2

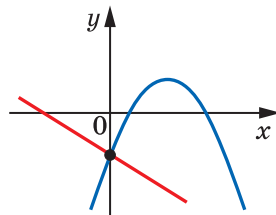


Рис 1.3

1.92. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$y = \frac{4x^4}{(x^4 + 1)^2} - \frac{24x^2}{x^4 + 1} + 1.$$

### Рівняння і нерівності з двома змінними

1.93. Розв'яжіть рівняння:

1)  $13x^2 - 12xy + 4y^2 - 4x + 1 = 0$ ;      2)  $|y| + 2 = \sqrt{4 - x^2}$ .

**1.94.** Розв'яжіть рівняння:

1)  $x^2 + 25y^2 - 6xy - 24y + 9 = 0$ ;      2)  $9 - x^2 = \sqrt{3 + |y|}$ .

**1.95.** Побудуйте графік рівняння:

1)  $(x - 3)^2 = (y + 5)^2$ ;      5)  $|y - 3| + |x| = 1$ ;

2)  $x^2y = |y|$ ;      6)  $|x| - 3 = \sqrt{9 - y^2}$ ;

3)  $x + 2 = \sqrt{|y| - 1}$ ;      7)  $\frac{y - x^2}{1 - x^2} = 1$ .

4)  $|y - 1| = \sqrt{x}$ ;

**1.96.** Побудуйте графік рівняння:

1)  $(x - 1)^2 = (x + 2y)^2$ ;      5)  $|y + 1| + |x - 2| = 2$ ;

2)  $x|y| = x^2$ ;      6)  $(|x| - 1)^2 + (|y| - 3)^2 = 4$ ;

3)  $x + 2 = \sqrt{|y - 1|}$ ;      7)  $\frac{(x^2 - 4)(x + y)}{y^2 - 1} = 0$ .

4)  $|y| - 1 = \sqrt{x}$ ;

**1.97.** Побудуйте графік нерівності:

1)  $x > |y + 2| - 2$ ;      3)  $(x + y)|y| \geq 0$ ;

2)  $|x| \leq |y^2 - 2y|$ ;      4)  $(x^2 + y^2 - 1)y^2 \leq 0$ .

**1.98.** Побудуйте графік нерівності:

1)  $y \leq |x - 3| + 1$ ;      3)  $(x - y)|x| < 0$ ;

2)  $|x - 2| - |y + 1| > 2$ ;      4)  $\frac{x^2 + y^2 - 1}{y^2} \geq 0$ .

**1.99.** Зобразіть на координатній площині  $xu$  множину розв'язків системи нерівностей:

1)  $\begin{cases} x + 2y > 1, \\ x - y \leq 3; \end{cases}$       2)  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ (x + 1)^2 + y^2 \leq 1. \end{cases}$

**1.100.** Зобразіть на координатній площині  $xu$  множину розв'язків системи нерівностей:

1)  $\begin{cases} y + x - 2 > 0, \\ x - 3y \leq 1; \end{cases}$       2)  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y \geq |x| + 1. \end{cases}$

**1.101.** Побудуйте графік нерівності:

1)  $\sqrt{x - 2y} > \sqrt{x + y}$ ;      2)  $x < \frac{6}{y}$ .

**1.102.** Побудуйте графік нерівності:

1)  $\sqrt{2x - y} < \sqrt{x - y}$ ;      2)  $y > -\frac{12}{x}$ .

**Метод математичної індукції**

**1.103.** Доведіть, що

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

**1.104.** Доведіть, що  $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$ .

**1.105.** Доведіть, що

$$\left(1 - \frac{2}{2 \cdot 3}\right) \left(1 - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) \left(1 - \frac{2}{4 \cdot 5}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n+3}{3(n+1)}.$$

**1.106.** Доведіть, що  $5^{n+2} + 6^{2n+1} \div 31, n \in \mathbb{N}$ .

**1.107.** Доведіть, що  $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n \div 19, n \in \mathbb{N}$ .

**1.108.** Доведіть, що  $14 \cdot 3^n + 9 \cdot 7^{2n} \div 23, n \in \mathbb{N}$ .

**1.109.** Доведіть нерівність  $2^n > 2n, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ .

**1.110.** Доведіть нерівність  $2^{n+4} > (n+4)^2, n \in \mathbb{N}$ .

**1.111.** Доведіть нерівність  $3^n > n^3, n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ .